VOL. 6 Nº2- 2024

Facultad de Ingeniería en Ciencias Aplicadas
Innovation & Development in Engineering and Applied Science
IDEAS

Método matricial para evaluación basado en valores y vectores propios

http://doi.org/10.53358/ideas.v6i2.1077

Jorge Ricardo Benalcázar Gómez, Alejandra Mabel Pinto Erazo
Universidad Técnica del Norte
jrbenalcazar@utn.edu.ec, ampinto@utn.edu.ec

Fecha de envío, marzo 18/2024 - Fecha de aceptación, mayo 28/2024 - Fecha de publicación, julio 15/2024

Resumen: Frente a diversas causas que conducen a un bajo rendimiento académico estudiantil en temas de Matemática, se planteó como objetivo una métrica con método matricial para la evaluación del aprendizaje de Matemática Compleja; considerando los ejes actitudinal, procedimental y cognitivo, así también los aspectos conceptual, algebraico y gráfico-numérico, es decir una matriz 3x3 que permitió recopilar datos específicos. Luego de la aplicación de ensayos experimentales enfocados a la obtención, procesamiento e interpretación de datos numéricos, se obtuvo como resultado dos matrices específicas de evaluación. Una "matriz de estado" que describe el conocimiento del estudiante antes de la ejecución de la actividad y otra al finalizar el ensayo, las cuales permiten comparar el conocimiento antes y después, expresarlo como extremos de una cadena de Márkov; así también, comparar con otras métricas de evaluación existentes, siendo las matrices una rúbrica de calificación que ayuda a identificar las fallas y plantear mejoras. Mediante un programa en MATLAB, se identificó un segundo resultado en forma de "Matriz de Transformación" que determina la evolución de la matriz de estado, es decir visualiza cuantitativamente el aprendizaje y por tanto mide la eficiencia de la actividad académica. Para ella se analizó la existencia de valores y vectores propios, los cuales se interpretan en la etapa de discusión.

Palabras clave: matriz de estado, evaluación del aprendizaje, vectores propios, matriz de transformación.

Abstract: In response to various causes leading to poor academic performance among students in Mathematics, the objective was to establish a matrix method metric for assessing Complex Mathematics learning; considering attitudinal, procedural, and cognitive axes, as well as conceptual, algebraic, and graphic-numerical aspects, i.e., a 3x3 matrix that allowed for the collection of specific data. Following the application of experimental trials focused on the acquisition, processing, and interpretation of numerical data, the result was two specific evaluation matrices. A "state matrix" describes the student's knowledge before the activity's execution and another at the trial's end, which allows for the comparison of knowledge before and after, expressing it as the extremes of a Markov chain; also, comparing it with other existing evaluation metrics, with the matrices serving as a grading rubric that helps identify shortcomings and propose improvements. Through a program in MATHLAB, a second outcome in the form of a "Transformation Matrix" was identified, which determines the evolution of the state matrix, i.e., quantitatively visualizes learning and thus measures the academic activity's efficiency. This involved analyzing the existence of eigenvalues and eigenvec-tors, which are interpreted in the discussion stage.

Keywords: state matrix, learning assessment, eigenvectors, transformation matrix.

Autor de correspondencia:
Alejandra Pinto, ampinto@utn.edu.ec

Introducción

La evaluación es el proceso fundamental que permite medir el aprendizaje y el desempeño de los estudiantes. Se trata de una herramienta esencial para evaluar el nivel de conocimientos, habilidades y competencias que han adquirido los estudiantes, lo que a su vez permite identificar fortalezas y debilidades en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Justificación

A criterio de Hattie [1], se enfatiza la importancia de la retroalimentación en el proceso de aprendizaje y ha desarrollado el concepto de "efecto de retroalimentación", que se refiere a la relación entre la retroalimentación que recibe el estudiante y su capacidad para aprender y mejorar su rendimiento. El docente elabora una secuencia didáctica enfocada a reforzar los puntos débiles del estudiante, mismo que debe conocer sus debilidades, errores e inconsistencias sin que se sienta desmotivado, cuando se le muestre el camino sienta la necesidad de recorrer el “camino faltante”.

La evaluación en la educación actual se lleva a cabo de diversas formas, desde exámenes y pruebas escritas hasta proyectos y presentaciones. Además, en los últimos años, se ha dado un mayor énfasis a la evaluación formativa, que implica la retroalimentación constante del docente al estudiante para mejorar su aprendizaje. También se ha fomentado la evaluación por competencias, que evalúa el desempeño del estudiante en situaciones reales, permitiendo una mejor medición de su capacidad para aplicar lo aprendido en el mundo laboral y en la vida diaria.

Marco Teórico

En general, “la evaluación consiste en emitir un juicio de valor, a partir de un conjunto de información sobre la evolución o los resultados de un alumno con el fin de tomar una decisión”. La evaluación entendida como valoración, seguimiento, calificación y retroalimentación, elementos indispensables para garantizar la calidad educativa y el éxito académico de los procesos de aprendizaje planificados, debe cumplir con las siguientes características:

- Validez: Se refiere a la capacidad de una evaluación para medir lo que pretende medir, aplicar la rúbrica ideal con certeza. Es importante asegurarse de que la evaluación se centre en los objetivos de aprendizaje específicos, sea coherente con las preguntas, los criterios de evaluación sean claros y relevantes para la materia o habilidad en cuestión [2]. La validez también se relaciona con la equidad, objetividad e imparcialidad en la evaluación, el docente en este contexto debe optimizar su esfuerzo en el cumplimiento de los planes y programas y a la vez impartir justicia.

- Fiabilidad: “No todo lo importante se puede medir, ni todo lo que se mide es importante” A. Einstein. Es importante que los resultados de la evaluación sean coherentes y confiables, incluso si se administra a diferentes grupos de estudiantes o en diferentes momentos. La fiabilidad puede mejorarse a través del uso de instrumentos de evaluación estandarizados con una calificación objetiva consistente y precisa [3].

- Autenticidad: La autenticidad se refiere a la capacidad de la evaluación para reflejar situaciones y contextos del mundo real. Las evaluaciones auténticas ayudan a los estudiantes a aplicar sus conocimientos y habilidades en situaciones prácticas y relevantes, de nada le sirve a un estudiante de ingeniería conocer la "Ley de la Mano Derecha" si no sabe a qué lado girar el destornillador. Esto puede ayudar a motivar a los estudiantes y a encausar su compromiso dentro de su "contrato de aprendizaje" [4] y rendimiento académico en la institución.

- Retroalimentación: Debe ser específica, constructiva y oportuna para ser efectiva. La retroalimentación efectiva es útil para aumentar el rendimiento académico, la pregunta es; ¿Qué retroalimentar? También puede ser útil para involucrar a los estudiantes en el proceso de evaluación, ya que puedan reflexionar sobre su propio desempeño y establecer objetivos específicos de crecimiento. Se habla entonces de un proceso de evaluación que no tiene un espíritu sancionador o castigador, sino más bien es una investigación que busca dónde aplicar correctivos y así evitar el autoritarismo en el proceso de aprendizaje.

- La flexibilidad La evaluación debe ser accesible y apropiada para todos los estudiantes, independientemente de sus habilidades, necesidades o circunstancias individuales. Esto puede requerir ajustes en el formato, los plazos o los requisitos de la evaluación para satisfacer las necesidades de los estudiantes. La flexibilidad también puede contribuir en la equidad, integrar la inclusión en el proceso de evaluación y romper la barrera con el docente.

- La calificación. - Valoración del rendimiento del alumnado en algún aspecto de la actividad formativa (prueba, test, seguimiento), la calificación es un arduo trabajo docente consistente en revisar minuciosamente las respuestas hasta altas horas de la noche, no para obtener una nota que presentar ante las autoridades, sino ante sus estudiantes, y establecer un plan de mejoras.

- Para medir el estado del conocimiento antes de la actividad académica se suele utilizar una rúbrica de calificación y se compara con los resultados al final de la etapa, la nota al final es función de muchas variables y está lejos de ser una función lineal.

Hipótesis

La utilización de una matriz como rúbrica puede tener una gran influencia en la práctica docente como herramienta para identificar errores y así poder enfocar el proceso de seguimiento, calificación y valoración del crecimiento para contribuir a una mayor comprensión en el proceso de aprendizaje alcanzado luego de la ejecución de actividades específicas dentro y fuera del aula. Puede tomarse como métrica y método para la evaluación del aprendizaje de algunas asignaturas en ciencias exactas, considerando los ejes actitudinales, procedimental [5], cognitivo, así también los aspectos conceptuales, algebraico y el eje numérico-aplicativo de algunas soluciones particulares.

Al plantear una matriz "de estado inicial" E0 para el conocimiento del estudiante antes de la ejecución de la actividad, cada celda tiene asignado un valor taxonómico específico para las preguntas de la evaluación, así se asegura una evaluación auténtica, fiable y válida. E0 contiene la calificación de los parámetros con los que el estudiante inicia el tema, se espera que luego de cada paquete de actividades, la matriz de estado E1 haya mejorado su calificación o nota al concluir el tema 1; así mismo E2 haya mejorado al concluir el tema 2, y así se aplica con cada tema.

Objetivo

La repetición sucesiva y ciega de problemas o actividades conduce a estados del conocimiento C0, C1, C2, C3,…Cn, pero la excesiva aplicación de pruebas, trabajos, test y exámenes, solo estresará al estudiante igual que al maestro, ya no ayudará a mejorar la calificación final del tema [2] , pues se ha alcanzado el límite Cn, sucede lo que se explica más adelante en las fórmulas (7) y (10), ya no se alcanza mayor calificación ni más conocimiento porque que la madurez matemática simplemente es parte del crecimiento mental de la persona y espera su momento de llegar.

Se planteó como objetivo; obtener la matriz específica de evaluación tras varias actividades para poder compararla con otras métricas de evaluación existentes. Esto permitió estimar las matrices anexas a cada método, además ayudó a identificar las fallas del estudiante, adicionalmente encontramos la matriz de transformación T que constituye una rúbrica para evaluar el método aplicado y herramienta para proyectar el conocimiento esperado.

Método

La representación del conocimiento como un "Vector de estado" 3D donde la primera componente se considera la calificación en el eje conceptual C_{11}^{O}, la segunda será en lo algebraico C_{21}^{0} y la tercera componente será numérica C_{31}^{0}, clasifica los tres aspectos dentro de un vector $\overrightarrow{V_0}$ para analizarlos por separado y poder compararlos con la siguiente etapa de aprendizaje.

$$\overrightarrow{V_0} = \begin{pmatrix} C_{11}^{0} \\ C_{21}^{0} \\ C_{31}^{0} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{1} \\ C_{21}^{1} \\ C_{31}^{1} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Para el vector de estado actitudinal luego de la primera actividad académica, las componentes provienen de las componentes del vector inicial $\overrightarrow{V_0}$ multiplicadas por la probabilidad de mejora o cambio, así entonces tenemos C_{11}^{O} por $\mathcal{P}_{\text{ac}}$, la probabilidad de mejora en el eje actitudinal conceptual, más el aporte por parte de la componente algebraica C_{21}^{O} por la probabilidad de aporte a través de lo actitudinal algebraica $\mathcal{P}_{aa}$ y más la parte numérica C_{31}^{O} de $\overrightarrow{V_0}$ por la probabilidad de ganar desde el eje actitudinal numérico $\mathcal{P}_{\text{an}}$, así obtenemos:

$$C_{11}^{1} = C_{11}^{O} \cdot \mathcal{P}_{ac} + C_{21}^{O} \cdot \mathcal{P}_{aa} + C_{31}^{O} \cdot \mathcal{P}_{an} \qquad (3)$$

De manera similar evolucionan la componente algebraica actitudinal;

$$C_{21}^{1} = C_{11}^{O} \cdot \mathcal{P}_{pc} + C_{21}^{O} \cdot \mathcal{P}_{pa} + C_{31}^{O} \cdot \mathcal{P}_{pn} \qquad (4)$$

E igualmente la componente numérica actitudinal;

$$C_{31}^{1} = C_{11}^{O} \cdot \mathcal{P}_{cc} + C_{21}^{O} \cdot \mathcal{P}_{ca} + C_{31}^{O} \cdot \mathcal{P}_{cn} \qquad (5)$$

Hemos alcanzado el nuevo vector de conocimiento que se obtiene como el producto de una matriz de transformación T por un vector:

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} C_{11}^{1} \\ C_{21}^{1} \\ C_{31}^{1} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \cdot \overrightarrow{V_0} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{ActtCncp} & \mathcal{P}_{ActtAlgb} & \mathcal{P}_{ActtNumr} \\ \mathcal{P}_{PrcCncp} & \mathcal{P}_{PrcAlgb} & \mathcal{P}_{PrcNumr} \\ \mathcal{P}_{CgntCncp} & \mathcal{P}_{CgntAlgb} & \mathcal{P}_{Cgnt\,Numr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_{11}^{0} \\ C_{21}^{0} \\ C_{31}^{0} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Si asumimos que cada actividad académica tiene un componente actitudinal, procedimental y conceptual en cada uno de los ejes conceptual, algebraico y numérico-gráfico, entonces el vector debe seguir la misma transformación;

$$\overrightarrow{V_2} = \mathcal{P} \cdot \overrightarrow{V_1} = \mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \cdot \overrightarrow{V_0} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{ac} & \mathcal{P}_{aa} & \mathcal{P}_{an} \\ \mathcal{P}_{pc} & \mathcal{P}_{pa} & \mathcal{P}_{pn} \\ \mathcal{P}_{cc} & \mathcal{P}_{ca} & \mathcal{P}_{cn} \end{pmatrix}^{2} \cdot \overrightarrow{V_0} \quad (7)$$

A partir de n se puede afirmar que se cumple la propiedad de Márkov [6], donde cada vector sucesivo es un eslabón de la cadena de evolución del conocimiento matemático.

$$\overrightarrow{V_{\mathrm{n+1}}} = \mathcal{P} \cdot \overrightarrow{V_{\mathrm{n}}} = \lambda \cdot \overrightarrow{V_{\mathrm{n}}} \quad (8)$$

$$\mathrm{T} = \mathcal{P}^{n} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{ac} & \mathcal{P}_{aa} & \mathcal{P}_{an} \\ \mathcal{P}_{pc} & \mathcal{P}_{pa} & \mathcal{P}_{pn} \\ \mathcal{P}_{cc} & \mathcal{P}_{ca} & \mathcal{P}_{cn} \end{pmatrix}^{n} \quad (9)$$

$$\mathcal{P}^{n} = P^{inv} \cdot D^{n} \cdot P = \left(\overrightarrow{V_{\lambda 1}} \quad \overrightarrow{V_{\lambda 2}} \quad \overrightarrow{V_{\lambda 3}}\right)^{inv} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{n} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{n} \end{pmatrix} \cdot \left(\overrightarrow{V_{\lambda 1}} \quad \overrightarrow{V_{\lambda 2}} \quad \overrightarrow{V_{\lambda 3}}\right) \quad (10)$$

Y a partir de ella la matriz de transformación $\mathcal{P}$ que es útil para proyectar la matriz de estado luego de deberes o tareas.

$$\mathcal{P} = \left(\overrightarrow{V_{\lambda 1}} \quad \overrightarrow{V_{\lambda 2}} \quad \overrightarrow{V_{\lambda 3}}\right)^{inv} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\overrightarrow{V_{\lambda 1}} \quad \overrightarrow{V_{\lambda 2}} \quad \overrightarrow{V_{\lambda 3}}\right) \quad (11)$$

Debe notarse que los valores propios para $\mathcal{P}^{n}$ corresponden a los valores propios de $\mathcal{P}$ elevados a la enésima potencia [7], de ahí la necesidad de encontrar los vectores propios para $\mathcal{P}^{n}$ y luego hallar $\mathcal{P}$ con la fórmula (11). El mismo razonamiento se aplicó al eje procedimental (columna 2) y al eje cognitivo (columna 3), tomando además en consideración; al aspecto conceptual, aspecto algebraico y aspecto numérico-aplicativo, se obtuvo una matriz de estado que tomó la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} Vector\ \text{fila"}conceptual\text{"} \\ Vector\ fila\text{" }algebraico\text{"} \\ Vector\ fila\ \text{"}num\acute{e}rico\text{"} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{cnpt}\,A_{ctt} & C_{cnpt}\,P_{rcd} & C_{cnpt}\,C_{gnt} \\ A_{lgbr}\,A_{ctt} & A_{lgbr}\,P_{rcd} & A_{lgbr}\,C_{gnt} \\ \mathrm{n_{mrc}}\,A_{ctt} & \mathrm{n_{mrc}}\,P_{rcd} & N_{mrc}C_{gnt} \end{pmatrix} = \left(V_{Columna\ Actitudinal}\,,\ \ V_{Columna\ Procedimental}\,,\ \ V_{Columna\ Cognitiva}\right) \quad (12)$$

Este producto brinda la posibilidad de extrapolar o proyectar el aprendizaje esperado luego de un conjunto de actividades específicas.

$$\begin{pmatrix} C_{11}^2 & C_{12}^2 & C_{13}^2 \\ C_{21}^2 & C_{22}^2 & C_{23}^2 \\ C_{31}^2 & C_{32}^2 & C_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{ActtCncp} & \mathcal{P}_{ActtAlgb} & \mathcal{P}_{ActtNumr} \\ \mathcal{P}_{PrcCncp} & \mathcal{P}_{PrcAlgb} & \mathcal{P}_{PrcNumr} \\ \mathcal{P}_{CgntCncp} & \mathcal{P}_{CgntAlgb} & \mathcal{P}_{Cgnt\,Numr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}^1 & C_{12}^1 & C_{13}^1 \\ C_{21}^1 & C_{22}^1 & C_{23}^1 \\ C_{31}^1 & C_{32}^1 & C_{33}^1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Es decir que el conocimiento del estudiante se caracterizó por una matriz 3x3 de 9 calificaciones a una prueba de 9 preguntas en una prueba estructurada, en dicho caso su evolución pudo expresarse como:

$$C_1 = \mathcal{P} \cdot C_0 = \mathcal{P}^1 C_0$$
$$C_2 = \mathcal{P} \cdot C_1 = \mathcal{P}^2 \cdot C_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_n = \mathcal{P} \cdot C_{n-1} = \mathcal{P}^n \cdot C_0 \quad (14)$$

Cn representa el conocimiento del estudiante en forma de tres vectores columna luego de n actividades académicas. Si la matriz C_0 tiene inversa C_0^{inv} se puede multiplicar por la derecha, es decir:

$$C_n C_0^{inv} = \mathcal{P}^n \begin{pmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 & C_{13}^0 \\ C_{21}^0 & C_{22}^0 & C_{23}^0 \\ C_{31}^0 & C_{32}^0 & C_{33}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}^{inv} & C_{12}^{inv} & C_{13}^{inv} \\ C_{21}^{inv} & C_{22}^{inv} & C_{23}^{inv} \\ C_{31}^{inv} & C_{32}^{inv} & C_{33}^{inv} \end{pmatrix} = \mathcal{P}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^n \quad (15)$$

[8], se obtuvo la fórmula para calcular $\mathcal{P}^n$ en base a datos conocidos;

$$\mathcal{P}^n = C_n \cdot C_0^{inv} \quad (16)$$

La prueba estructurada

La temática es "Números complejos e imaginarios". Luego de la visualización de 5 videos con el respectivo resumen, 5 clases, 1 lección y 1 deber, (total 12 actividades que definen 12 cambios) se diseñó y aplicó la siguiente prueba estructurada, de manera que conste de tres filas y 3 columnas (matriz- 3x3). El modelo se visualiza a continuación en la Tabla 1:

Tabla 1. Estructura de la matriz de estado del conocimiento del estudiante (valores taxonómicos de las 9 preguntas.

EJE ACTITUDINAL	EJE PROCEDIMENTAL	EJE COGNITIVO	
¿Es respetuoso?, ¿Es puntual? ¿Dibuja el problema?	¿Sigue las instrucciones?, ¿Es metódico?	¿Memoriza las definiciones?, ¿Entiende los teoremas y las leyes?, ¿Asocia con ejemplos?	ASPECTO CONCEPTUAL
¿Conoce la ecuación?, ¿Acepta el desafío?	¿Conoce el algoritmo de solución de la ecuación?, ¿Puede despejar la fórmula?	¿Resuelve la ecuación?, ¿Memorizó la fórmula?	ASPECTO ALGEBRAICO
¿Interpreta los resultados?, ¿Toma conciencia del caso?	¿Registra ordenadamente los datos y resultados?, ¿Conoce los algoritmos de cálculo?	¿Calcula correctamente?, ¿Grafica bien los resultados?, ¿Extrae conclusiones?	ASPECTO NUMÉRICO APLICATIVO

Con base en este análisis taxonómico se procedió a realizar una evaluación cuantitativa como la que se muestra a continuación;

UTN-FICA-CITEL-Matemática Aplicada AbrlAgst2023

Números Imaginarios ***Mcf Jorge Benalcázar G.*** ***Fecha:***

Apellidos y Nombre: ***C.I.***

Indicaciones. - Encuentre la respuesta a cada una de las preguntas y escríbala en el casillero correspondiente que está numerado el lado posterior de esta hoja. Use los valores p= q= asignados por el docente.

Pregunta11.- $1+\sqrt{3}$ *; es un número; racional, complejo, irracional o natural. (escriba la palabra)*

Pregunta12.- Para multiplicar los números complejos $z_1 = (1 \quad + \quad q \cdot i)$ *y* $z_2 = (p \quad - \quad i)$ *¿Se debe usar la propiedad asociativa, conmutativa o distributiva? (escriba la palabra)*

Pregunta13.- Defina . $\sqrt{-1}$

Pregunta 21.-Calcular la suma de $z_1 = (p \quad + \quad 2 \cdot i)$ *y* $z_2 = (q \quad - \quad i)$

Pregunta 22.-Calcular el producto de los números complejos: $z_1 = (1 \quad ; \quad 25^o)$ *por p y* $z_2 = (2 \quad ; \quad -15^o)$ *por q.*

Pregunta 23.- Escriba la fórmula general para calcular el producto de dos complejos en coordenadas cartesianas

Pregunta 31.- Indique el valor de $(\sqrt{-1})^1$ *y de* $(\sqrt{-1})^3$

Pregunta 32.- Calcular el producto de complejos; $z_1 = (p \quad + \quad 2i)$ *y* $z_2 = (2 \quad - \quad q \cdot i)$

Pregunta 33.- En que eje se encuentra $(\sqrt{-1})^2$

Tabla 2.- Matriz de respuestas correctas a las 9 preguntas planteadas.

EJE ACTITUDINAL	EJE PROCEDIMENTAL	EJE COGNITIVO	
R11; Es un número irracional	R12; Se debe usar la propiedad distributiva	R13; Es un vector de longitud 1 hacia el ejercicio +1	ASPECTO CONCEPTUAL
R21; $z_1 + z_2 = (p + q \quad ; \quad i)$	R22; $z_1\, z_2 = (2pq, 10^o)$	R23; $z_1\, z_2 = [(au - bv), (av + bu)i]$	ASPECTO ALGEBRAICO
R31; $(\sqrt{-1})^1 = i$ y $(\sqrt{-1})^3 = -i$	R32; $z_1\, z_2 = [2(p+q), (4 - pq)i]$	R33; Se encuentra en el eje real negativo	ASPECTO NUMÉRICO APLICATIVO

La calificación debió cuantificarse en cada celda, es decir que constará la nota completa o la nota mínima, sin valores intermedios que pudieran conducir a la existencia de filas proporcionales entre sí y que; $det(C) = 0$, en cuyo caso no existiría la matriz inversa y el método no sería confiable. Para evadir este caso, las calificaciones máxima y mínima fueron elegidas por los autores de manera Heurística siguiendo el criterio que se detalla a continuación:

Las notas asignadas como máximo, y que se muestran en la tabla 3 son tales que los tres vectores fila son linealmente independientes al igual que los vectores columna de la Tabla 3, los valores estimados como mínimo se toman de la nota máxima dividida para 10 como en la tabla 7, de ese modo fueron distintos de cero y no hubo filas proporcionales, así siempre se tuvo $det(C) \neq 0$. Se hizo que la suma sea 10 y su determinante sea distinto de cero, con los datos de la matriz de la tabla 3 y la fórmula (16) se encuentra $\mathcal{P}^n$, cuyos EIGEN valores son calculados con el siguiente algoritmo en MATLAB:

```
% CALCULA VALORES PROPIOS, MATRIZ DIAGONAL Y VECTORES PROPIOS E10
%Eo = input ('Ingresa la matriz E0 en la forma [e11, e12, e13; e21, e22, e23; e31, e32, e33]: ')
Eo = [0.1,0,0; 0,0.15,0;0,0,0.1];
Eo_inv=inv (Eo);
%Cn = input ('Ingresa la matriz Cn en la forma: [c_11^n, c_12^n, c_13^n; c_21^n, c_22^n , c_23^n; c_31^n,
c_32^n, c_33^n]; ')
Cn = [0.7,0.8,0.95; 1.3,1.5,1.4;1.25,1.1,1];
Tn= Eo_inv *Cn;
% Se calculan los valores propios y vectores propios de Tn =Tn
[eigenVectors, eigenValues] = eig (Tn);
P=eigenVectors;
% Matriz inversa de P (Pinv)
P_inv=inv(P);
disp ('MATRIZ INVERSA Pinv=');
disp(P_inv);
% Muestra los valores propios pero elevados a la n-ésima potencia
disp ('Valores Propios elevados a la n potencia:');
Dn=eigenValues;
disp (diag (Dn));
D = [1,0,0; 0,1,0;0,0,1];
% el programa debe oftener la n-ésima raíz real de los VP de Dn e ingresarlos a la matriz D
D (1,1) = (abs (Dn (1,1))) ^ (1/12);
D (2,2) = (abs (Dn (2,2))) ^ (1/12);
D (3,3) = (abs (Dn (3,3))) ^ (1/12);
%Se eligen valores reales de la raíz deλ^n
disp ('3 Valores Propios=');
disp(diag(D));
disp ('MATRIZ DE PASO=');
disp(P);
disp ('MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN T=');
T= P_inv*D*P;
disp(T); %FIN DE LA OPERACIÓN!
```

En el caso analizado, la matriz es diagonalizable, sin embargo, existe la posibilidad de que no lo sea; entonces se debería revisar si el método propuesto puede adaptarse para usar la forma canónica de Jordan, que es una generalización de la forma diagonal para matrices que no son diagonalizable. La forma de Jordan permite trabajar con bloques para cada valor propio, que no son necesariamente de 1x1 (es decir, no son escalares) pero aún facilitan ciertos cálculos y transformaciones de la matriz. Este análisis, así como el caso de valores complejos correspondería a un amplio estudio futuro.

Resultados y discusión

Tomando en consideración el valor taxonómico de cada una de las preguntas de la prueba se llegó a la siguiente matriz de calificaciones con los valores tope ideal máximo:

Tabla 3.- Matriz de valoración más alta de cada una de las 9 preguntas.

EJE ACTITUDINAL	EJE PROCEDIMENTAL	EJE COGNITIVO	
C_{11}=0,7	C_{12}=0,8	C_{13}=0,95	ASPECTO CONCEPTUAL
C_{21}= 1,3	C_{22}=1,5	C_{23}=1,4	ASPECTO ALGEBRAICO
C_{31}=1,25	C_{32}=1,1	C_{33}=1,0	ASPECTO NUMÉRICO APLICATIVO

Con el uso de MATLAB se obtienen las potencias 12 de los valores propios, $\lambda_1^{12} = 28.6951 \quad ,\lambda_2^{12} = -2.5288 \quad ,\lambda_3^{12} = 0.8337$, de acuerdo con la Fórmula de Moivre; existen 12 raíces complejas, se tomó solo una de sus proyecciones reales positiva; $\lambda_1 = 1.3228 \quad ,\lambda_2 = 1.0804 \quad y\ \lambda_3 = 0.9850$, para construir los vectores propios y la respectiva matriz de paso:

$$P = \begin{pmatrix} -0.4968 & -0.6600 & 0.4065 \\ -0.5609 & -0.0982 & -0.8116 \\ -0.6622 & 0.7448 & 0.4196 \end{pmatrix}$$

cada columna representa una ruta de crecimiento del estudiante.

Matriz de Transformación: $T = \begin{pmatrix} 1.1123 & 0.1329 & -0.0329 \\ 0.1348 & 1.1603 & -0.1028 \\ -0.0384 & -0.1015 & 1.1156 \end{pmatrix}$

Con esta matriz de transformación se puede proyectar la calificación de una futura actividad, sin embargo, ni el conocimiento ni la calificación mejoran. La aplicación de la prueba antes indicada con las cotas de valoración de las tablas 3 y 7, condujo a los siguientes resultados para el mejor estudiante del grupo:

Tabla 4.- Estructura de la matriz de calificaciones obtenida por el estudiante élite.

EJE ACTITUDINAL	EJE PROCEDIMENTAL	EJE COGNITIVO	
C_{11}=0,7	C_{12}=0,8	C_{13}=0,95	ASPECTO CONCEPTUAL
C_{21}= 1,3	C_{22}=0,15	C_{23}=1,4	ASPECTO ALGEBRAICO
C_{31}=1,25	C_{32}=1,1	C_{33}=1,0	ASPECTO NUMÉRICO APLICATIVO

La suma es 8,65, nota para el mejor estudiante, los valores propios reales de la matriz Tn de un estudiante sobresaliente son: $\lambda_1^{12} = 26.2955 \quad ,\lambda_2^{12} = -2.4687 \quad ,\lambda_3^{12} = -5.8268$, del conjunto de raíces, se elige la real y positiva; $\lambda_1 = 1.3132 \quad ,\lambda_2 = 1.0782 \quad y\ \lambda_3 = 1.1582$ conducen a la matriz de paso:

$$P = \begin{pmatrix} -0.5375 & -0.7482 & 0.2296 \\ -0.4478 & 0.1084 & -0.8748 \\ -0.7146 & 0.6545 & 0.4267 \end{pmatrix}$$

Y a la Matriz de Transformación:

$$T = \begin{pmatrix} 1.1932 & 0.0764 & -0.0553 \\ 0.0708 & 1.2530 & -0.0247 \\ -0.0501 & -0.0174 & 1.1035 \end{pmatrix}$$

Una actividad adicional ayuda a este estudiante a alcanzar una nota de 9, la pregunta es ¿Hay tiempo para aquello? Resultados para el estudiante medio:

Tabla 5.- Matriz de calificación obtenida por un estudiante medio.

EJE ACTITUDINAL	EJE PROCEDIMENTAL	EJE COGNITIVO	
C_{11}=0,07	C_{12}=0,8	C_{13}=0,95	ASPECTO CONCEPTUAL
C_{21}= 1,3	C_{22}=0,15	C_{23}=1,4	ASPECTO ALGEBRAICO
C_{31}=1,25	C_{32}=0,11	C_{33}=1,0	ASPECTO NUMÉRICO APLICATIVO

Podemos darnos cuenta de que su suma es 7,03 nota de un estudiante medio, los valores propios para dicho estudiante son: $\lambda_1 = 1.2880$ $, \lambda_2 = 1.1875$ y $\lambda_3 = 1.0215$, del conjunto de raíces, se elige la real y positiva; con ellos obtenemos tres vectores propios:

$$P = \begin{pmatrix} -0.5246 & -0.8073 & -0.5031 \\ -0.5389 & 0.2080 & -0.6062 \\ -0.6590 & 0.5522 & 0.6160 \end{pmatrix}$$

La Matriz de Transformación indica un bajo aporte de las actividades hacia lo algebraico, para subir su nota a 8, necesitaría por lo menos dos actividades extra.

$$T = \begin{pmatrix} 1.1336 & 0.1223 & 0.1118 \\ 0.0581 & 1.2607 & 0.0428 \\ 0.0678 & -0.0836 & 1.1028 \end{pmatrix}$$

La más baja nota dentro del grupo corresponde a la tabla 6.

Tabla 6.- Rúbrica del estudiante con calificación de 2,575.

EJE ACTITUDINAL	EJE PROCEDIMENTAL	EJE COGNITIVO	
C_{11}=0,07	C_{12}=0,8	C_{13}=0,95	ASPECTO CONCEPTUAL
C_{21}= 0,13	C_{22}=0,15	C_{23}=0,14	ASPECTO ALGEBRAICO
C_{31}=0,125	C_{32}=0,11	C_{33}=0,1	ASPECTO NUMÉRICO APLICATIVO

Del conjunto de raíces, se elige la real y positiva, los valores propios reales de la matriz de la figura 6 son:

$\lambda_1 = 1.1566$ $, \lambda_2 = 1.0975$ $, \lambda_3 = 0.7353$, de ahí los Vectores propios:

$$P = \begin{pmatrix} 0.9267 & 0.9559 & 0.1792 \\ 0.2286 & -0.1456 & -0.7588 \\ 0.2981 & -0.2552 & 0.6262 \end{pmatrix}$$

La Matriz de Transformación indica deficiencias en el aspecto conceptual y numérico, el estudiante necesita repetir todas las actividades.

$$T = \begin{pmatrix} 1.0008 & 0.1302 & -0.2511 \\ 0.1623 & 1.0202 & 0.2787 \\ -0.0603 & 0.0541 & 0.9684 \end{pmatrix}$$

Para los valores mínimos se tiene:

Tabla 7.- Matriz de valoración más baja posible de cada pregunta.

EJE ACTITUDINAL	**EJE PROCEDIMENTAL**	**EJE COGNITIVO**	
C_{11}=0,07	C_{12}=0,08	C_{13}=0,095	ASPECTO CONCEPTUAL
C_{21}= 0,13	C_{22}=0,15	C_{23}=0,14	ASPECTO ALGEBRAICO
C_{31}=0,125	C_{32}=0,11	C_{33}=0,1	ASPECTO NUMÉRICO APLICATIVO

La suma es 1.0 y su determinante D=7,223. Del conjunto de raíces, se elige la real y positiva, los valores propios de la matriz son: $\lambda_1 = 1.0918$ $, \lambda_2 = 0.8918$ $, \lambda_3 = 0.8130$

Vectores propios:

$$P = \begin{pmatrix} -0.4968 & -0.6600 & 0.4065 \\ -0.5609 & -0.0982 & -0.8116 \\ -0.6622 & 0.7448 & 0.4196 \end{pmatrix}$$

La Matriz de Transformación indica deficiencias en el aspecto conceptual y numérico, el estudiante necesita repetir todas las actividades.

$$T = \begin{pmatrix} 0.9181 & 0.1097 & -0.0272 \\ 0.1113 & 0.9577 & -0.0849 \\ -0.0317 & -0.0838 & 0.9208 \end{pmatrix}$$

A diferencia de los otros, el método matricial nos brinda la matriz de transformación T para poder predecir el crecimiento de la matriz de conocimientos del estudiante. Los vectores propios nos indican la ruta de expansión del conocimiento tras tal o cual actividad académica. Podemos hablar entonces del espacio vectorial del conocimiento adquirido.

Conclusiones

Es posible definir un vector fila 1x3 netamente conceptual, con tres componentes; actitudinal, procedimental y cognitiva, un segundo vector fila 1x3 netamente algebraico con similares componentes y finalmente un tercer vector fila 1x3 con las mismas componentes, pero con contenido numérico aplicativo.

El crecimiento matemático del estudiante en cada aspecto puede expresarse mediante una cadena de Márkov de vectores fila 1x3.

Finalmente es posible definir una cadena de matrices de estado 3x3 para expresar la evolución del conocimiento del estudiante en los aspectos; conceptual, algebraico, numérico por filas, y en los ejes; actitudinal, procedimental, cognitivo por columnas.

Es posible encontrar una matriz de transformación T que determina la evolución del conocimiento tras una o varias actividades académicas, como un producto de vector por matriz.

Cada valor propio de la matriz de transformación T está asociado a un vector propio (vector fila) en el eje actitudinal, otro vector fila en el eje procedimental y un tercer valor conduce a un vector fila en el eje cognitivo. Así, cada vector propio determina la "ruta" de crecimiento mental del estudiante y por lo tanto define el valor taxonómico real de las actividades guiadas o ejecutadas por el docente.

Se logra identificar fallas puntuales en el aprovechamiento tales como: un estudiante necesita profundizar más en lo conceptual numérico porque los resultados de la matriz de Transformación indican un bajo aporte de las actividades hacia lo algebraico, para subir su nota a 8, necesitaría por lo menos dos actividades extra.

Recomendaciones

Aplicar el presente método por vectores para identificar la ruta de crecimiento del conocimiento estudiante e identificar deficiencias y poder guiar su mejora.

Aplicar el presente método por matrices para identificar las rutas óptimas de crecimiento del conocimiento estudiantil y poder evaluar los métodos docentes y así poder guiar su mejora. Es importante explorar los casos de valores propios complejos y de vectores con componentes complejas.

Referencias

1. Hattie, J., Visible Learning. Routledge ed. 2009.
2. Espíndola Castro, J.L., Reingeniería educativa: Enseñar y aprender por competencias. 2011, México: Segunda edición.
3. Pérez Gómez, Á.I., Educarse en la era digital. Morata ed. 2012, Madrid.
4. Holton Iii, E.F.S.R.A. and M.S. Knowles, Andragogía: El aprendizaje de los adultos. Oxford Uni ed. 2001, México, D.F.
5. Dugua Chatagner, C.C.R.M.d. and S. Olivares Lucas, La evaluación del aprendizaje en el nivel superior desde el enfoque por competencias. México, D. ed. 2016, México.
6. Lay, D.C., Álgebra lineal para cursos con enfoque por competencias. Pearson ed. 2013, México, D.F.
7. Grossman, S.I., Álgebra lineal. McGraw-Hil ed. 2008, Madrid.
8. Larson, R., Fundamentos de álgebra lineal. México, D. ed. 2016, México, D.F.: Cengage Learning

.